LA COULEUR DES PREUVES

On aimerait dire que le meilleur moyen de convaincre quelqu'un de la vérité d'une proposition est encore de lui en administrer la preuve, et que la démonstration est un cas paradigmatique de discours persuasif. Devant une preuve, pas d'autre ressource que de s'incliner: une preuve avec laquelle on pourrait être légitimement en désaccord ne serait, justement, pas une preuve. Le royaume des mathématiques, qui est celui de la preuve, devrait donc par excellence faire partie de l'empire de la rhétorique, dont relève tout discours "propre à persuader" [1] . Or ce n'est pas le cas. Ce n'est certainement pas le cas aujourd'hui, alors que la rhétorique est au terme d'un mouvement historique de restriction qui l'a séparée de toute théorie de l'argumentation, la limitant à une taxinomie des ornements du discours [2]. Mais ce n'était pas non plus le cas chez les fondateurs de la discipline, qui se refusaient à voir dans la démonstration une espèce du discours persuasif. Car le discours persuasif, objet de la rhétorique aristotélicienne, était défini par un ensemble de traits qui l'opposaient terme à terme au discours mathématique:

(i) Ce discours, essentiellement destiné à peser sur les délibérations d'autrui et à influer sur ses décisions, ne saurait viser à accréditer que des propositions contingentes: puisque nul ne délibère sur ce qui est hors de sa portée [3], il n'y a aucun intérêt à vouloir convaincre quelqu'un de la vérité d'une proposition nécessairement vraie.

(ii) Contrairement au discours mathématique qui est à la fois impersonnel et égocentré (il est le soliloque des "contemplateurs du vrai" [4]), le discours persuasif est orienté vers l'auditoire singulier dont il doit capter la bénévolence en s'adaptant à ses dispositions du moment [5].

---

[1] Aristote, Rhétorique, 1355 b 25-26.

[2] Le Traité de l'argumentation de Ch. Perelman et L. Olbrechts-Tyteca (1958, P.U.F.) est probablement le premier ouvrage à avoir réagi contre cette évolution.

[3] Ethique à Nicomaque, VI, 5, 3.

[4] Ethique à Nicomaque, I, 7, 19. Cf aussi An. Post., I, 10, 76 b 24 - 27: "La démonstration se rapporte non au discours extérieur, mais au discours intérieur de l'âme (...). On peut toujours trouver des objections au discours extérieur, mais contredire le discours intérieur n'est pas toujours possible."

[5] Cf Pascal: "Quoi que ce soit qu'on veuille persuader, il faut avoir égard à la personne à qui on en veut, dont il faut connaître l'esprit et le coeur, quels principes il accorde, quelles choses il aime; et ensuite remarquer, dans la chose dont il s'agit, quels rapports elle a avec les principes avoués, ou avec les objets délicieux par les

(iii) La persuasion qui est à la portée d'un tel discours est la simple persuasion [1], celle qui peut toujours, au moins en principe, être renversée par un discours encore plus efficace, en sorte que l'on ne parlera pas de persuasion dans les situations où l'auditoire peut être, d'une certaine manière, conduit à une adhésion totale et irréversible: là où il n'y a pas de place pour la contestation, il n'y a pas de place non plus pour la persuasion.

(iv) Il n'est pas question de persuader quelqu'un de ce dont il ne peut manquer s'apercevoir de lui-même (comme le dit sobrement Aristote [2] , "ceux qui se demandent si la neige est blanche n'ont qu'à regarder"); et il serait également futile de chercher à persuader quelqu'un de ce qui est *virtuellement* visible par tous, comme l'égalité à deux droits de la somme des angles d'un triangle (égalité qui est contenue "en puissance" dans la figure du triangle [3]).

En somme l'argumentation persuasive ne contient pas sa limite (l'argumentation démonstrative, *more geometrico*), si bien que la seule décision possible pour le rhétoricien semble être d'oublier que le texte mathématique livre une preuve, et de le lire comme un texte littéraire, ou tout au moins comme une "production textuelle" à laquelle pourraient s'appliquer les catégories explicatives de la rhétorique usuelle, forgées quant à elles pour analyser les textes sans visée démonstrative.

Le point de vue résidualiste auquel le rhétoricien se trouve ainsi acculé peut être caractérisé de la manière suivante:

(i) Les preuves sont des entités abstraites qui doivent être distinguées de leur expression linguistique, une même preuve pouvant être présentée de plusieurs façons distinctes [4] .

---

charmes qu'on lui donne." (De l'esprit géométrique et de l'art de persuader, in Oeuvres Complètes, Editions du Seuil, 1963, p 356).

[1] “Il est aussi erroné d'accepter du mathématicien des arguments qui ne sont que persuasifs, que d'exiger du rhéteur qu'il donne des démonstrations.” (Ethique à Nicomaque, I, 3, 4). Cf aussi Abélard: "Dialecticus vero et orator, scilicet rhetor (...) solam probabilitem intendunt." (Super Topica Glossae, p 135).

[2] Topiques, I, 11, 105 a 6-7.

[3] Métaphysique, Θ, 9, 1051 a 23.

[4] On trouve chez Brouwer une formulation particulièrement radicale de cette distinction: "les preuves mathématiques mentales (*gedanklich*), qui contiennent en général une infinité de termes, ne doivent pas être confondues avec leurs corrélats (*Begleitungen*) linguistiques, lesquels sont finis et nécessairement inadéquats, et n'appartiennent donc pas aux mathématiques." (Über Definitionsbereiche von Funktionen, *Mathematische Annalen*, XVII-1927, p 64; Collected Works I: Philosophy and Foundations of Mathematics (A. Heyting ed.), North-Holland Elsevier, 1975, 1982, p 394).

(ii) Alors que les preuves sont objectives et pour ainsi dire imposées par la nature même des énoncés à démontrer, leur expression linguistique est libre et peut manifester des variations individuelles pouvant être appréhendées comme des traits stylistiques.

(iii) La rhétorique du discours mathématique a pour objet l'expression linguistique de la preuve et non la preuve elle-même.

Une rhétorique ainsi conçue doit donc s'interroger sur les effets subsidiaires du texte mathématique, c'est-à-dire sur les effets qui ne se réduisent pas à l'installation chez le lecteur de la conviction qu'une certaine proposition mathématique est correcte. Parmi les dispositifs destinés à produire de tels effets extra-démonstratifs, il convient de réserver le cas des "paratextes" (avant-propos, avertissements, etc), principalement destinés à justifier la publication du texte, à en conseiller l'achat ou à en recommander la lecture: bien qu'ils puissent être fort révélateurs de l'image que les mathématiciens se font - ou souhaitent renvoyer - de leur propre activité, ces dispositifs, qui sont généralement attachés à des textes (ouvrages d'introduction, manuels d'enseignement) ne contenant aucun résultat nouveau, sont trop lâchement reliés au contenu effectif des preuves pour être ici d'une quelconque pertinence. Restent donc les effets qui résultent proprement du mode de présentation de la preuve.

1. La couleur des preuves. Une phrase contient généralement, à côté des éléments de discours qui contribuent à la détermination de sa valeur de vérité, des expressions susceptibles d'induire certains états mentaux chez son auditeur, et en particulier d'induire chez lui la croyance que certains états mentaux caractéristiques ont présidé à sa formulation par le locuteur. Ainsi de l'adverbe "malheureusement", dont l'adjonction à une phrase n'en modifie pas les conditions de vérité, mais nous renseigne simplement sur l'état d'esprit de son énonciateur. Convenons avec Frege [1] d'appeler "couleur" (*Färbung*) ou "éclairage" (*Beleuchtung*) d'une phrase l'ensemble des effets ainsi produits: participent donc à la couleur d'un discours tous les éléments capables d'affecter la subjectivité de son auditeur mais non de contribuer à la définition des conditions de vérité objectives des phrases qu'il contient.

Les objets auxquels les énoncés mathématiques paraissent référer (hypercubes, espaces de Banach, etc) sont des objets "idéaux", c'est-à-dire inétendus, atemporels et causalement inertes. Comme aucune transaction matérielle

[1] Cf sa lettre à Husserl du 30 octobre 1906, in G. Gabriel & alii (eds.), Wissenschaftlicher Briefwechsel, F. Meiner Verlag, 1976, pp 101-102.

n'est envisageable avec eux, il n'y a jamais lieu de se réjouir ou de redouter qu'ils aient telle ou telle propriété. On a généralement tendance à considérer qu'un discours qui se rapporte à de tels objets incapables de nous affecter émotivement devrait être un discours massivement incolore, dénué d'effets non cognitifs sur son lecteur. Tel n'est pourtant pas le cas, et les conditions très particulières dans lesquelles sont lus les textes mathématiques, aussi bien que les enjeux sociaux qui s'attachent à leur compréhension, expliquent en grande partie l'existence de ces effets.

1.1. Rhétorique de la facilité. A une extrémité du spectre, la famille des lecteurs de mathématiques contient la multitude de ceux qui sont prioritairement mûs par la nécessité de satisfaire en ce domaine aux exigences d'une maîtrise minimale ou moyenne, sanctionnée par des examens et des concours. A tous ceux-là, qui constituent sans nul doute l'immense majorité du lectorat mathématique, l'auteur bien avisé ne suppose pas trop de connaissances "prérequises", et s'ingénie à donner le sentiment qu'aucun talent particulier n'est ici nécessaire à côté de la simple "lumière naturelle". Autant que de la vérité de la proposition dont on donne la preuve, c'est d'une chose beaucoup plus contingente et "sensible" que le lecteur de cette catégorie doit être persuadé, à savoir que sa crainte de ne pas comprendre est sans fondement, qu'un manque bien compréhensible de pratique est, somme toute, le seul handicap qui le sépare de l'auteur, et qu'il serait lui-même capable, le cas échéant, de trouver de semblables théorèmes et d'en rédiger une démonstration. Bien entendu, pas plus que les ouvrages de thérapeutique ne mentionnent les ressources oratoires mobilisées par le médecin pour imposer à son malade d'absorber les bons remèdes [1] , les manuels de mathématiques ne gardent la trace de tous les moyens rhétoriques utilisés par le maître pour rendre vraisemblable le vrai et pour atténuer l'impression de <u>violence rationnelle</u> dégagée par la preuve. Mais les composantes majeures de cette rhétorique de la facilité sont tout de même attestées dans les ouvrages les plus soucieux de clarté didactique, lesquels ne renoncent guère qu'aux admonestations sans contenu et aux pures redondances ("il est clair que p" pour "p") du discours oral:

(i) le <u>préfixage</u> de la preuve par des considérations qui préparent le lecteur à admettre le théorème en lui montrant combien il est plausible compte tenu des faits mathématiques dont il est déjà averti (par exemple parce qu'il est une simple généralisation à n dimensions d'un résultat avéré en dimensions 2 et 3).

---

[1] Platon, <u>Gorgias</u>, 456 b.

(ii) la signalisation de la preuve par des marques qui en indiquent les principales articulations (expressions du type "maintenant", "d'une part", "d'autre part", "en conclusion", apposées aux bons endroits) et, dans les cas les plus complexes, par des *Leitfäden* qui indiquent graphiquement les différentes routes qui peuvent être choisies dans sa lecture.

(iii) l'exposition de la preuve dans un ordre qui la fasse apparaître comme "facile", c'est-à-dire qui donne au lecteur le sentiment qu'il pourrait lui-même être le théâtre d'une expérience intellectuelle analogue à celle qui a présidé à sa mise au point par l'auteur [1] .

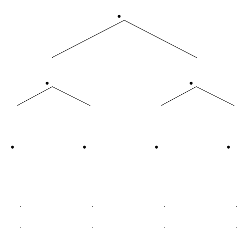
Une telle disposition, destinée à "faire voir comment les choses ont été inventées" [2] , doit refléter le processus qui a conduit à l'écriture de la preuve. Elle doit donc commencer par énoncer une proposition de laquelle le théorème pourrait être conclu, et poursuivre cette régression des propositions à prouver aux propositions permettant de les justifier jusqu'à l'obtention d'une proposition-source déjà validée au titre d'axiome ou de théorème démontré par ailleurs. Car c'est cette démarche régressive qui est mobilisée dans la recherche de la preuve, et non la démarche progressive qui consisterait à partir de propositions déjà établies pour aller à celles qui en découlent, et à répéter ce processus jusqu'au point où le théorème à prouver est l'une des conclusions possibles ainsi obtenues [3] . La disposition "régressive", *theorem-driven*, qui donne de la preuve une présentation parallèle à la démarche heuristique qui a permis de la trouver, est donc en principe

---

[1] Aristote avait fort bien perçu les effets de persuasion secondaire qui résultent non des arguments eux-mêmes, mais de leur mode d'apparition dans le discours: "il ne suffit pas d'être en possession des arguments à produire, il est encore nécessaire de les présenter comme il faut, et cela contribue pour beaucoup à ce que le discours paraisse avoir tel et tel caractère." (Rhétorique, III, 1, 1403 b 15-18).

[2] Descartes, Regulae ad directionem ingenii, IV, A.T. X, p 375.

[3] L'avantage de la recherche régressive tient bien sûr à une différence dans l'indice de ramification des deux stratégies: dans l'arborescence des démonstrations, les axiomes ont une infinité de successeurs, alors que les théorèmes n'ont qu'un nombre fini de prédécesseurs:



exempte des effets parasites de sidération dont la disposition inverse est porteuse [1].

Mais il convient de reconnaître qu'il n'y a guère d'exemples indiscutables de la clarté et de la facilité suprêmes (*perspicuitas et facilitas summa* [2]) censément associées à cette façon d'écrire les preuves: ceux-là mêmes qui préconisent ce style en parlent plutôt comme d'un idéal jamais encore atteint, qu'ils supposent devoir être réalisé dans la "véritable" mathématique (*in vera Mathesi debere esse supponimus* [3]), mais dont ils admettent que les manifestations historiques se résument à quelques traces (*vestigia* [4]) chez Diophante et Pappus [5] . L'explication de cette rareté est fort simple: les "vrais" textes mathématiques se recommandent de valeurs bien différentes de la facilité, et visent à induire chez leurs lecteurs des effets qui sont pour le moins compatibles avec le sentiment d'être l'objet d'une contrainte par raisons.

1.2. Les figures de l'inexorable. La dernière chose dont l'auteur d'un texte mathématique "authentique" cherche à persuader son lecteur est bien la réplicabilité, en lui, de la démarche intellectuelle qui a conduit à la mise au point de la démonstration qu'il propose. Le lecteur d'un mémoire original sait qu'il ne doit attendre de l'auteur aucune bénévolence de ce type. Car sa propre absence de mansuétude est la plus sûre - et, finalement, la seule - garantie de la correction de la preuve, laquelle demande donc à être présentée de manière à pouvoir être le plus aisément contrôlée, c'est-à-dire en suivant la voie qui mène des axiomes au théorème. Quant aux effets de stupeur induits par cette méthode dans les cas les plus spectaculaires [6] - puisque ce mode d'exposition dissimule tout à fait ce que

---

[1] "Certes, les géomètres [qui disposent leurs preuves en allant des axiomes au théorème prouvé] démontrent scrupuleusement leurs affirmations; toutefois ils contraignent l'esprit davantage qu'ils ne l'éclairent; ce faisant, à coup sûr, ils s'attirent la plus grande admiration, extorquant malgré lui son assentiment au lecteur et le circonvenant par une technique qui le surprend" (Leibniz, Opuscules et fragments inédits (L. Couturat ed.), 1903, p 33).

[2] Descartes, ibid, p 377.

[3] Descartes, loc. cit.

[4] Descartes, ibid, p 376.

[5] Le texte de référence est évidemment le "Trésor de l'Analyse" (Αναλυομενος Τοπος) de Pappus (Pappi Alexandrini Collectionis Quae Supersunt (Fr. Hultsch ed.), Weidmann, Berlin, 1876-1877, II, pp 634-636 (trad. fçse P. ver Eecke, réimpr. A. Blanchard, 1982, II, pp 476-478). A l'époque moderne, le plaidoyer le plus systématique en faveur de ce style d'exposition mathématique est dû à G. Polya, How to Solve it ?, Princeton U.P., 1945 (trad. fçse Comment poser et résoudre un problème ?, Dunod, 1957).

[6] On songera à la réaction de P. Gordon devant la preuve par Hilbert de l'existence d'une base finie pour tout système d'invariants algébriques: "Ce n'est

Clairaut nommait "la raison qui détermine l'Inventeur" [1] - , ils sont dans ce contexte autant de bénéfices secondaires dont aucun auteur ne songerait à se priver: la satisfaction qu'il obtient ainsi est comparable à celle du joueur d'échecs qui réussit un mat "à la découverte", dans lequel le coup final se borne à faire voir subitement à quoi servait l'arsenal longuement préparé dans l'ombre, forçant ainsi une victoire que l'adversaire n'avait pas vu venir [2] .

L'inflexible rigueur d'une démonstration mathématique est en principe assurée par la possibilité de la formaliser, c'est-à-dire de la rédiger dans un format où sa vérification devient une opération élémentaire, de nature purement mécanique: une suite de formules d'un système formel est une démonstration de sa formule finale si chaque formule de la suite est un axiome ou provient de formules précédentes par application d'une règle d'inférence du système. Il n'est donc en principe pas plus difficile de vérifier si une preuve est correcte que de vérifier si une formule comporte bien un nombre pair de parenthèses, en sorte que la compétence requise du lecteur pourrait se limiter à savoir lire, écrire et compter [3] . Mais la possibilité de formaliser intégralement les preuves reste, justement, une possibilité de principe, irréalisable en pratique. Et plutôt qu'à vérifier mécaniquement la correction d'une démonstration formalisée, le lecteur est convié à une tâche difficile et non mécanisable: vérifier que le texte qui lui est proposé pourrait être rédigé de façon formalisée. Comme le souligne A.N. Whitehead, "la plus grande part de l'investigation mathématique ne concerne pas l'analyse du processus complet de raisonnement, mais la présentation d'un *abstract* de la preuve, en tant qu'il est suffisant pour convaincre un esprit correctement instruit" [4] . Se réintroduit par ce biais une certaine dimension de persuasion du discours mathématique: expressément destiné à des lecteurs "avertis" qu'il s'agit de convaincre, et non pas littéralement rédigé pour être "traité" par une machine informatique, le texte de la preuve vise à établir une vérité nécessaire en accréditant une proposition contingente, à savoir la possibilité de sa propre

---

plus des mathématiques, c'est de la théologie" (cf C. Reid, Hilbert, Springer Verlag, 1970, p 34).

[1] Elements de Géométrie (1741), cité par G. Darmois in G. Polya, Comment poser et résoudre un problème, p VII.

[2] Selon Aristote, c'est exactement l'objectif le dialecticien habile cherche à atteindre: "la conclusion une fois établie, il faut que l'interlocuteur en soit encore à rechercher le pourquoi" (Topiques, 156 a 14-15).

[3] Cf Bourbaki, Eléments de Mathématique, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970, p E I.10.

[4] Whitehead & Russell, Principia Mathematica, Cambridge U.P., 1910, rééd. 1970, Introduction, p 3. On songera à la démonstration récemment proposée par Wiles du dernier théorème de Fermat, dont la vérification devrait prendre plusieurs mois à la communauté mathématique.

transformation en un raisonnement si contraignant que vouloir se soustraire à ses conclusions reviendrait *ipso facto* à renoncer à tout emploi rationnel de ses facultés intellectuelles [1] .

Mais en vérité de tels textes visent d'autres effets encore, très éloignés du seul souci de certifier un énoncé mathématique. Militant pour ainsi dire en faveur de leur propre publiabilité, ils doivent rendre manifeste non seulement qu'ils répondent aux exigences de rigueur requises en ce domaine, mais encore que la démonstration qu'ils exposent est à la fois intéressante et inédite. Car tout théorème n'est pas digne d'être démontré (aucun texte mathématique effectivement diffusé n'a jamais consisté à prouver que 302 x 5 = 1510), et aucun théorème déjà démontré n'est digne de l'être à nouveau par les mêmes voies. On s'engage ici sur un terrain plus mouvant encore que celui de la rigueur démonstrative, puisque l'intérêt et l'originalité d'une preuve sont manifestement des qualités qui appellent une <u>appréciation</u> plutôt qu'un <u>contrôle</u>.

Comme les textes littéraires, les textes mathématiques entretiennent avec leurs prédécesseurs un ensemble de relations qui peut se figurer par l'image traditionnelle du palimpseste, où l'on voit sur le même parchemin un texte se superposer à d'autres qu'il ne dissimule pas tout à fait et qu'il laisse voir par transparence. Mais contrairement au domaine littéraire, dont le domaine de définition n'a pas de frontières nettement délimitées, et où la variété des formes d'"inter-textualité" défie la recension [2] , la bibliothèque des textes mathématiques, beaucoup mieux circonscrite, est régie à cet égard par des règles assez simples. Excluant comme illégale ou non pertinente toute reproduction à visée de plagiat ou de parodie, ces règles n'admettent pour l'essentiel que deux modalités dans la reprise de théorèmes anciens par des textes neufs:

(i) Compte tenu de l'impossibilité de remonter toujours *ab Urbe condita*, le théorème ancien peut être invoqué au titre de <u>lemme</u> dans une nouvelle démonstration, le texte mathématique renvoyant alors à son prédécesseur comme à une garantie partielle de sa propre légitimité.

(ii) Le théorème ancien peut figurer au titre de <u>corollaire</u> du résultat nouveau, lequel en constitue alors une généralisation ou une réinstanciation au sein d'une théorie plus puissante; dans ces conditions, le dernier texte annule et maintient à la fois son prédécesseur, lui donnant une légitimité fraîche et, simultanément, exténuant son intérêt en le faisant apparaître comme périmé.

---

[1] Bourbaki, op. cit., p E I.13.
[2] On en aura un aperçu avec l'ouvrage de G. Genette justement nommé <u>Palimpsestes</u>, Editions du Seuil, 1982.

Hormis ces deux modes de reproduction - l'utilisation explicite, la re-légitimation - , la reprise de l'ancien est tacitement prohibée: *ne bis in idem*, une seule performance doit suffire. Aussi le soupçon plane-t-il toujours, lorsque le langage dont use l'auteur s'écarte trop du langage "décent", "net" et "bref'" consacré dans la communauté mathématique, que le texte n'usurpe purement et simplement ses droits à l'existence publique [1] : quoi de plus facile que d'"user extraordinairement de noms champêtres" [2], pour tâcher de faire croire que l'on n'a jamais lu Apollonius ou Pappus et que l'on n'a jamais tiré d'eux aucune lumière, alors que l'on ne sait au fond qu'en "déguiser les démonstrations" [3] ? Un texte au style insolite, porteur d'une revendication d'originalité trop appuyée, attire immanquablement sur son auteur la suspicion du plagiat ...

L'atténuation ou l'exacerbation du sentiment de violence rationnelle dégagée par la preuve, l'effet de stupeur éventuellement causé par sa lecture, le degré d'originalité spontanément reconnu à son auteur, tels sont quelques-uns des résultats extra-démonstratifs engendrés, que son signataire les ait ou non voulus, par tout texte mathématique. L'ensemble de ces effets, qui constituent la couleur singulière du texte, comprend tous les états doxastiques ou émotifs effectivement induits par sa lecture, et exclut tous les effets théoriques de la preuve qu'il expose (ne déterminent la couleur du texte aucun des éléments qui devraient conduire un lecteur idéalement rationnel à tenir le théorème pour avéré). *Prima facie*, la rhétorique résidualiste, qui se restreint délibérément à l'étude de la couleur des preuves, ne saurait donc rendre compte que d'un aspect marginal du discours mathématique. Pour le rhétoricien plus ambitieux, deux possibilités seulement restent ouvertes. Ou bien il doit montrer que, contre toute apparence, les effets de couleur jouent un rôle véritablement central dans l'expérience mathématique. Ou bien il doit abandonner le point de vue résidualiste et montrer que les caractéristiques logiques de la preuve relèvent elles aussi, en un certain sens, d'une approche rhétorique. Nous nous proposons de consacrer la fin de cette étude à un examen critique et prospectif de ces deux perspectives.

---

[1] Desargues, maître de Pascal et auteur d'un remarquable traité de géométrie projective, était critiqué par son contemporain Beaugrand dans les termes suivants: "Son jargon (...) est contraire à la netteté et à la brièveté qui est requise en l'expression des propositions mathématiques", et il affecte "cette façon de mal parler en mathématique, non seulement pour ne pas savoir la bonne, mais aussi afin que lorsqu'il dirait ce qui est ailleurs, il y eut plus de peine à le reconnaître." (cité par R. Taton, L'oeuvre mathématique de G. Desargues, P.U.F., 1951, p 36).
[2] Huret, in Desargues, op. cit., p 46.
[3] Desargues, op. cit; p 40.

2. Rhétorisation des mathématiques. La distinction frégéenne du "contenu objectif" et de la "couleur" d'un énoncé ne soulève guère de difficulté dans le cas des énoncés empiriques. Elle est seulement la distinction entre les conditions objectives de vérité d'une phrase (sa conformité aux faits) et les sentiments qui président à son émission ou qui sont induits par sa réception [1] : s'il pleut, la phrase “Dommage, il pleut“ est vraie, et ne saurait être considérée comme fausse sous prétexte que celui qui la prononce aime, en fait, la pluie (dans un tel cas, elle est simplement insincère, ce qui est une tout autre affaire). Mais cette notion usuelle de "conditions de vérité" d'un énoncé - "a est un ϕ" est vraie si et seulement si le référent de "a" a la propriété désignée par "ϕ" - ne s'applique pas sans distorsion aux énoncés mathématiques, puisque la notion de conformité aux faits semble bien engager la possibilité, au moins principielle, de la mise en oeuvre d'un ensemble d'actions (déplacements, observations, mesures, ...) permettant de vérifier si les objets auxquels les énoncés se réfèrent ont bien les propriétés qu'ils leur attribuent. En l'absence d'une telle possibilité de contact vérificatoire avec leurs référents apparents, qui sont des objets idéaux, incapables de susciter aucun ébranlement sensoriel, les théorèmes mathématiques peuvent difficilement être considérés comme <u>littéralement</u> vrais ou conformes à des "faits" extra-linguistiques. Ils ressemblent moins à des vérités de physique qu'à des vérités <u>fictionnelles</u> comme "Oliver Twist vivait à Londres", phrase dont le référent est également "idéal", et qu'il serait vain de chercher à vérifier en mettant en route un protocole de validation <u>externe</u> à l'oeuvre littéraire elle-même [2] . Tel est, sommairement décrit, l'argument sur la base duquel on pourrait songer à défendre une "littérarisation" des mathématiques, contestant toute possibilité de discriminer de façon bien nette, en ce domaine, entre la couleur des textes et leur contenu objectif [3] .

2.1. Fictions mathématiques, fictions littéraires. L'histoire des mathématiques illustre bien mal la thèse selon laquelle cette discipline consisterait en l'exploration systématique d'un monde indépendant et fixe d'objets subsistant par

---

[1] "Rien de ce que l'on peut appeler en poésie la tonalité, l'odeur, la lumière, rien de ce qui est dépeint par le ton et par le rythme, rien de tout cela n'appartient à la pensée" (<u>Der Gedanke</u>, in <u>Kleine Schriften</u> (I. Angelelli (ed.), Olms, 2° ed., 1990, p 348)).
[2] Cf H. Field, <u>Realism, Mathematics and Modality</u>, Basil Blackwell, 1989, p 3.
[3] Cf aussi Y. I. Manin, <u>Mathematics as Metaphor</u>, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, 1990, pp 1665-1671; et D. Nordon, <u>Mathématiques, forme littéraire</u>, manuscrit, 1993.

eux-mêmes. Coups de théâtre imprévisibles (la "crise des irrationnelles" au V° siècle avant notre ère), apparition incessante de personnages nouveaux (nombres complexes, quaternions, cardinaux transfinis), galerie de monstres dont la seule présence vient dérégler les dénouements les plus attendus, et auxquels l'on devra s'ingénier à barrer la route (ces fonctions grimaçantes que Poincaré voyait défiler depuis un demi-siècle en un "musée tératologique", et qui semblaient "s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions" [1]), effacement discret de figures longtemps familières, mais dont les démêlés trop embrouillés et mesquins avaient fini par lasser (cercles incrits, exinscrits et circonscrits, lemniscates et autres strophoïdes), *come-back* inattendu de sujets que l'on avait cru à jamais disparus (analyse non standard: infiniment petits, le retour), personnages que tout sépare, mais qui finiront par révéler leurs affinités (les nombres <u>entiers</u> premiers et la fonction ζ de variable <u>complexe</u>), ou bien que tout semble unir mais qui s'avèreront de lignages opposés (le parallélisme et la perpendicularité): l'image suggérée par ce flux est plutôt celle d'une matrice de mondes impétueusement créés par l'esprit humain, et dont chacun peut être le support d'une histoire charmante - les histoires vraiment ennuyeuses ne l'étant que par référence à d'autres déjà racontées.

Admettons cela, abandonnons l'idée d'un univers stable et bien défini d'entités pré-existant à l'enquête mathématique, et remplaçons la par l'image chère à Goodman de "mondes innombrables, bâtis à partir de rien par l'usage de symboles" [2] . Quelle différence subsiste-t-il alors entre les "objets" mathématiques et les personnages de la fiction littéraire ?

La première réponse qui vient à l'esprit concerne l'étroitesse du rapport à la réalité, l'"applicabilité", et pour tout dire l'utilité: même s'ils ne <u>dénotent</u> rien de réel, bien des termes mathématiques sont <u>exemplifiés</u> par des objets qui font indéniablement partie de l'ameublement du monde, et notre compréhension de l'univers repose en grande partie sur des exemplifications de ce genre (celles qui

[1] Poincaré, <u>Science et méthode</u>, Flammarion, 1938, p 132-133.
[2] N. Goodman, <u>Ways of Worldmaking</u>, Hackett Publ., 1978 (trad. fçse <u>Manières de faire le monde</u>, Editions J. Chambon, 1992, p 9). Cf déjà J. Bolyai, relatant à son père en 1823 les résultats qu'il avait obtenus en géométrie non-euclidienne: "Pour l'instant je ne peux rien dire d'autre que ceci: j'ai créé un étrange et nouvel univers à partir de rien." (cité par M.J. Greenberg, <u>Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History</u>, Freeman & Co, 2° édit., 1980, p 129. De même, Hilbert: "Sitôt que j'ai posé un axiome, il est là et il est "vrai"." (lettre à Frege du 29 décembre 1899, trad. fçse in F. Rivenc et Ph. de Rouilhan (eds.), <u>Logique et fondements des mathématiques</u>, Payot, 1992, p 224).

nous font voir, typiquement, la trajectoire des planètes comme une ellipse) [1] . Mais l'accroissement d'intelligibilité procuré par les mathématiques possède une contrepartie assez exacte du côté des fictions littéraires. Car elles aussi, après tout, jouent un rôle éminent dans la compréhension du monde, et elles le tiennent en vertu du même mécanisme d'exemplification: Bouvard et Pécuchet sont "réalisés" par une foule d'individus bien réels, qui gagnent en clarté d'être ainsi appréhendés. Comme le note encore Goodman [2], "nos mondes ne sont pas plus hérités des scientifiques (...) que des romanciers", de sorte qu'il est hautement problématique de discriminer fictions mathématiques et littéraires sous l'angle de la simple utilité.

Le texte mathématique, qui n'est pas plus "utile" que le texte de fiction littéraire, est en revanche plus <u>sérieux</u> que lui, au sens où son auteur s'engage à l'égard des propositions qu'il énonce et qu'il doit les justifier, alors que l'auteur de fiction, qui ne fait que simuler cet engagement, n'y est pour sa part nullement tenu [3] . Que l'on veuille bien mettre de côté pour un instant les différences grammaticales qui sautent aux yeux (prétérit de narration *versus* présent éternel, absence ou présence de symboles) entre les deux phrases “Julien ne put retenir ses larmes“ et “Il existe un entier premier entre p et p!+1“: bien que ce dont quelque chose est dit (Julien Sorel, l'entier p) puisse être dans chaque cas considéré comme fictif, l'énoncé mathématique est le seul à être <u>réellement</u> utilisé pour faire une assertion. Car la phrase de Stendhal, quant à elle, <u>feint</u> simplement d'asserter quelque chose, et n'engage nullement son auteur à justifier quoi que ce soit (comment l'écrivain sait-il ce qu'il avance ? il ne le sait pas, il l'invente) [4] .

Cette différence de type "illocutoire" entre assertion et pseudo-assertion semble bien donner la clé d'une distinction plus sûre entre fiction narrative et

---

[1] Bien entendu l'applicabilité des mathématiques à l'univers matériel ne suppose pas que tous les termes mathématiques soient ainsi exemplifiés, car un terme peut être considéré comme appliqué s'il est <u>utilisé</u> dans la dérivation d'un énoncé relatif à l'univers physique. Mais on peut établir un résultat de "conservativité" selon lequel de tels termes peuvent être en principe éliminés de la <u>dérivation</u> des énoncés qui ne les contiennent pas (cf H. Field, op. cit.), en sorte que l'on est, d'une certaine manière, ramené au cas précédent: un terme mathématique est applicable s'il figure dans une <u>description</u> intelligible de l'univers matériel.

[2] op. cit., p 134.

[3] Cf J. Searle, <u>The Logical Status of Fictional Discourse</u>, in <u>Expression and Meaning</u>, Cambridge U.P., 1979, pp 58-75.

[4] Il est à peine nécessaire de préciser que l'assertion feinte, qui n'est pas une assertion, diffère du mensonge, qui est en est une, mais insincère. Le menteur, qui affirme quelque chose sans y croire, est engagé à l'égard de ce qu'il dit (il lui manque simplement l'intention de tenir cet engagement). L'auteur de fiction, lui, ne s'engage pas, et ne saurait donc être qualifié de menteur lorsqu'il tient des propos auxquels il ne croit pas.

fiction mathématique. Encore convient-il de souligner que nous sommes ici sur un terrain purement psychologique, puisque la différence entre asserter et feindre d'asserter n'est *prima facie* qu'une différence dans l'"état d'esprit" (sérieux ou pas) qui préside à l'énonciation de la phrase, et que cette différence ne peut être infailliblement attestée par aucune marque "grammaticale" objective: comme le montrent délectablement les parodies de Pérec [1] , les mesures que l'on prend pour dire que ce que l'on dit est sérieux ou "scientifique" (avertissements solennels, pluie de figures, de cartes, de schémas expérimentaux et de références bibliographiques) peuvent toujours être détournées et reproduites de manière feinte. En particulier aucun des signes extérieurs de la mathématicité (foisonnement de symboles, emploi abondant des mots de la liturgie démonstrative, etc) ne permet de garantir au lecteur qu'il se trouve bien en face d'un texte de type assertatif [2] .

D'autre part, au point où nous en sommes dans nos tentatives pour discriminer les textes mathématiques des textes de fiction, l'auteur et le lecteur jouent des rôles tout à fait asymétriques: la mathématicité du discours dépend des intentions illocutoires du seul auteur, et la méconnaissance de ces intentions par le lecteur n'est en aucun cas susceptible d'altérer la nature du texte [3] . Or ce privilège du scripteur - déterminer la "qualité" du discours à soi seul et par l'unique vertu de ses propres performances mentales - , qui peut être à la rigueur admis lorsqu'il est question du discours solitaire, devient exorbitant lorsqu'il prétend s'exercer à l'égard de textes dotés d'une existence publique: les "intentions" du lecteur, la manière dont il opère pour actualiser l'ensemble des signes typographiques qui ne sont après tout que lettres mortes avant son intervention, cela aussi doit contribuer à constituer le texte comme tel et à en déterminer le genre. En somme il faut rompre avec les prérogatives régaliennes traditionnellement reconnues à l'auteur, et considérer que la "qualité" du texte résulte de la structure des intentions croi-sées de l'auteur et du lecteur. Nous allons voir qu'il est possible de décrire cette

---

[1] Cantatrix Sopranica L. et autres écrits scientifiques, Seuil, 1991.

[2] Les cas où le doute est réel dans ce domaine sur les intentions de l'auteur sont certes rares, et peut-être inexistants (de l'article de R. Cloutier, Application des équations de Gotlib au calcul des volumes présphériques - censément publié dans *Arch. Int. Mathemat. transcend.*, 1976, 66: 34-36 -, on ne connaît que le titre, mentionné par Pérec, op. cit., p 55). Mais il n'importe: ce doute est visiblement possible puisque, comme le note Searle, "il n'y a pas de propriété textuelle, syn-taxique ou sémantique, qui permette d'identifier un texte comme une oeuvre de fiction" (op. cit, p 65).

[3] C'est bien ainsi que l'entend Searle (loc. cit.): la fictionnalité d'un texte "repose nécessairement sur les intentions illocutoires de son auteur".

structure de manière non psychologisante, et d'en tirer un critère de démarcation satisfaisant entre le discours mathématique et celui de la fiction littéraire.

2.2. Lector in mathematica. La magie de la fiction narrative n'opère que si le lecteur feint de croire ce que l'auteur feint d'asserter: il n'y a pas de "plaisir du texte" pour les mauvaises têtes. Mais la bénévolence requise ne s'arrête pas là. Parmi les mondes possibles compatibles avec la lettre du texte, le lecteur avisé doit s'efforcer de choisir ceux que l'auteur avait en tête. Ainsi, si le texte dit d'Eric et Mélanie, qui habitent ensemble à Clermont, qu'ils sont mariés, aucun lecteur raisonnable n'ira supposer qu'ils ne sont pas mariés ensemble. Car un lecteur raisonnable fait toujours l'hypothèse que l'auteur l'est aussi, et un auteur raisonnable ne s'exprimerait jamais de cette façon s'il voulait suggérer à son lecteur que ses héros ne sont pas mariés ensemble. En somme l'auteur avisé est celui qui décide de ses phrases en fonction de ce qu'il croit que le lecteur croira de ses intentions à lui - l'auteur - lorsqu'il les lira, et réciproquement le lecteur avisé est celui qui interprète les phrases qu'il lit en se fondant sur la croyance que l'auteur est lui-même avisé au sens précédent. On a ici la structure typique d'un <u>jeu de coopération</u>, dans lequel chacun des protagonistes a intérêt à faire gagner l'autre, et où la difficulté est simplement de faire converger les actions vers le même but (dans le cas qui nous occupe, cette convergence, garantie de la félicité commune de l'auteur et du lecteur, est massivement assurée par un ensemble de règles conversationnelles <u>implicites</u> qui recommandent certaines décisions interprétatives et en disqualifient d'autres [1]).

Le ressort du texte mathématique est très exactement contraire: son lecteur idéal est le lecteur vicieux et malveillant qui résiste aux suggestions de l'auteur en essayant systématiquement d'envisager d'<u>autres</u> mondes possibles que ceux qu'il avait en tête. Ainsi la bonne manière de lire un texte visant à établir la proposition P sous l'hypothèse H consiste à écarter délibérément ceux des mondes vérifiant H (en bref: des "H-mondes") que l'auteur avait en vue (et dans lesquels P, bien entendu, est vrai), et à tenter de construire un H-monde dans lequel P est faux, quitte pour cela à donner aux mots un sens déviant, radicalement distinct de celui que l'auteur leur attribuait [2] . Ici l'intérêt du lecteur avisé est foncièrement opposé

[1] Cf U. Eco, <u>Lector in Fabula</u>, 1979 (trad. fçse Grasset, 1985), en particulier le chap. III.

[2] C'est typiquement la procédure utilisée pour débusquer l'erreur dans les nombreux textes (Proclus, Legendre, Saccheri, Wallis, Gergonne, W. Bolyai, etc) visant à prouver le 5° postulat d'Euclide à partir des autres axiomes de la géométrie euclidienne: on interprète les termes fondamentaux de la géométrie (point, droite, ...) dans un modèle quelconque de la géométrie non-euclidienne.

à celui de l'auteur qu'il lit (l'un ne peut gagner que si l'autre perd), et la structure de leur interaction est exactement celle d'un jeu conflictuel (à somme nulle).

Cette caractérisation du texte mathématique appelle deux remarques:

(i) Le (bon) lecteur de mathématiques est conduit à faire varier systématiquement - à l'intérieur des limites explicitement permises par le texte - la signification des mots utilisés par l'auteur, et par là-même à neutraliser la fonction métaphorique qu'ils exercent dans la langue naturelle. Ce parti-pris, qui peut par exemple le conduire à entendre par "droite" cela même que la communauté linguistique à laquelle il appartient désigne du nom de "demi-cercle", fait violence aux connotations attachées aux mots et annule donc les effets de couleur induits par leur usage ordinaire.

(ii) Tel qu'on le conçoit d'ordinaire, le discours démonstratif est un discours solitaire qui n'a pas même besoin d'être lu pour obtenir son effet, à savoir l'établissement d'une certaine proposition relative à un monde séparé d'entités mathématiques (le lecteur vient au plus contrôler la correction de ce qui s'est dit avant lui). Les considérations qui précèdent suggèrent de renoncer à cette image solipsiste de l'écriture mathématique, et de lui substituer l'idée d'un jeu conflictuel entre un auteur qui propose et un lecteur qui s'oppose: une preuve de A est simplement un jeu dans lequel celui qui propose A possède une stratégie gagnante, c'est-à-dire est assuré de l'emporter quels que soient les choix effectués par l'opposant dans sa tentative de constuire un modèle dans lequel A est faux [1] . C'est en faisant

---

Pour le récit d'une telle lecture, cf A. Denjoy, Le mécanisme des opérations mentales chez les mathématiciens, *Astérisque*, n° 28-29, 1975, cité par D. Nordon, op. cit..

[1] L'idée sous-jacente est familière aux logiciens: elle consiste à convertir en preuve de A l'échec d'une procédure systématique de réfutation de A menée jusqu'à son terme. La formulation en termes de jeu conflictuel peut être illustrée à propos de l'énoncé $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Moi, auteur, je l'asserte. Et toi, lecteur récalcitrant, tu le contestes en m'indiquant un $\varepsilon > 0$ de ton choix, et en me mettant au défi de trouver un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - y_0|$ soit inférieur à ε si $|x - x_0|$ est inférieur à δ. J'ai prouvé mon assertion si je peux répondre à ton défi en donnant un δ (évidemment fonction de ton ε) vérifiant la condition.

La définition de ce jeu se prolonge sans difficulté aux connecteurs propositionnels (cf J. Hintikka & J. Kulas, The Game of Language, Reidel, 1985): 1) pour une formule atomique, j'ai gagné si elle est vraie, et toi si elle est fausse 2) pour A&B, nous jouons le jeu associé à A, ou le jeu associé à B, à ta convenance 3) pour ¬A, nous échangeons nos rôles.

affleurer de cette manière le rôle constitutif de la dispute rationnelle que l'on pourra envisager une approche rhétorique d'ensemble du discours mathématique [1].

Jacques Dubucs * et Monique Dubucs **

* I.H.P.S.T., C.N.R.S./Paris I

** Académie de Versailles

[1] La possibilité et les objectifs d'une telle rhétorique non résidualiste soulèvent bien entendu nombre de questions que nous n'avons pas pu discuter ici. Certaines d'entre elles, qui concernent par exemple la définition d'un "degré zéro" dans l'écriture des preuves, ont été abordées dans de précédentes publications de l'un d'entre nous, notamment dans J. Dubucs, Die sogenannte Analyzität der Mathematik (*Grazer Philosophische Studien* , XXXII-1988, pp 83-112) et La fabrique de la preuve (*Espaces-Temps* XLVII-XLVIII (1991), pp 35-51).